

Warszawa, 13 października 2021 r.

Dr hab. Katarzyna Bień-Barkowska, prof. SGH
Kolegium Analiz Ekonomicznych
Instytut Ekonometrii
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
ul. Madalińskiego 6/8
02-513 Warszawa

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Justyny Mokrzyckiej pt.
„Bayesowskie modele Copula-GARCH
w analizie zależności finansowych szeregów czasowych”**

Przedmiotem recenzji jest rozprawa doktorska mgr Justyny Mokrzyckiej, zatytułowana „Bayesowskie modele Copula-GARCH w analizie zależności finansowych szeregów czasowych”, napisana pod opieką naukową dr hab. Anny Pajor, prof. UEK, oraz pełniącecej funkcję promotora pomocniczego pracy dr. hab. Macieja Kostrzewskiego, prof. UEK. Recenzję przedkładam w odpowiedzi na prośbę skierowaną z Centrum Kształcenia Doktorantów i Obsługi Postępowań Doktorskich z dn. 8 lipca 2021 r., na podstawie decyzji Rady Dyscypliny Ekonomii i Finansów Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie z dn. 5 lipca 2021 r.

Ocena celu rozprawy

Tematyka rozprawy doktorskiej dobrze wpisuje się w dyscyplinę naukową „Ekonomia i Finanse”, a dokładniej w obszar zagadnień ekonometrii finansowej. Pracę oceniam jako nowatorską. Opinia ta odnosi się zarówno do warstwy teoretycznej, jak i empirycznej pracy.

W części teoretycznej Autorka omawia bądź proponuje zaawansowane metodologicznie bayesowskie metody estymacji i prognozowania na podstawie modeli klasy Copula-GARCH, w części empirycznej natomiast dokonuje porównania i oceny

jakości wielu reprezentantów tej rodziny na podstawie różnorodnych finansowych szeregów czasowych, dotyczących zarówno rynku akcji, jak i rynku walutowego.

Na wstępie chciałabym szczególnie wysoko ocenić duży nakład pracy włożony przez Doktorantkę w realizację postawionego przez nią celu, którym jest *de facto* rozwój nieklasycznych narzędzi ilościowych ekonometrii bayesowskiej. Wielowymiarowe modele klasy Copula-GARCH są bardzo złożone z uwagi na różne aspekty ich konstrukcji: odpowiednie równania opisujące warunkowe wartości oczekiwane i warunkowe wariancje rozkładów brzegowych, a także zmienną w czasie strukturę zależności generowaną przez warunkową funkcję kopula. Estymacja i prognozowanie na podstawie takich równań, a także szacunki wynikających z nich miar ryzyka za pomocą metod bayesowskich, wymagają zastosowania zaawansowanych metod symulacyjnych. Uważam, że aktywny wkład Autorki w rozwój takich kompleksowych oraz wysublimowanych metodologicznie narzędzi wymaga szczególnego docenienia.

Główny cel pracy Autorka formułuje jako „opracowanie i omówienie bayesowskich metod w zakresie estymacji, predykcji i porównania modeli Copula-GARCH oraz ich wykorzystanie do opisu zależności wybranych szeregów czasowych (danych dziennych), pochodzących z rynków finansowych”. Uważam, że cel pracy ma duże znaczenie zarówno w wymiarze czysto teoretycznym, czyli w zakresie doskonalenia narzędzi badawczych, jak i w obszarze empirycznym. Modele klasy Copula-GARCH i ich bayesowskie odpowiedniki umożliwiają opis warunkowych wielowymiarowych rozkładów stóp zwrotu na rynkach finansowych, przy uwzględnieniu wielu bardzo szczególnych cech empirycznych, wyrażających się m.in. poprzez: (1) efekt skupiania zmienności, (2) możliwą autokorelację lub korelację krzyżową (3) złożonych bieżących współzależności między procesami brzegowymi, w tym współzależności w ogonach rozkładu. Adekwatny opis tych cech za pomocą odpowiednio zaprojektowanych modeli ekonometrycznych jest ważny nie tylko dla rozwoju „wiedzy czystej”, lecz ma również duże walory użyteczne. Modele takie mogą służyć bowiem weryfikacji hipotez dotyczących funkcjonowania rynku finansowego, odpowiadając na pytania o dynamikę wzorców powiązań pomiędzy poszczególnymi segmentami takiego rynku lub jego poszczególnymi walorami, czy też o odporność gospodarki na szoki zewnętrzne i zagrożenia kryzysami. Ponadto, jak słusznie akcentuje Autorka, modele takie umożliwiają konstruowanie miar ryzyka, co szczególnie w dobie turbulencji na rynku finansowym obserwowanych w okresie pandemii COVID-19 nabiera dużego znaczenia z punktu widzenia zarządzania portfelem inwestycji.

Charakterystyka i ocena zawartości rozprawy

Dysertacja ma zwartą strukturę (172 strony) obejmującą pięć rozdziałów (oraz Wstęp i Podsumowanie). Rozdział pierwszy prezentuje bardzo syntetyczne kompendium wiedzy na temat sposobów modelowania struktury zależności pomiędzy stopami zwrotu z różnych instrumentów finansowych. Autorka skupia się w nim przede wszystkim na przedstawieniu tła sformalizowanych pojęć i definicji wykorzystywanych w dalszej części rozprawy. Punktem ciężkości jest przede wszystkim koncepcja kopuli, rodzajów takich funkcji i generowanych przez nie zależności między zmiennymi w podziale na współczynnik tau Kendalla i zależności w ogonach rozkładu, a także korzystające z koncepcji kopuli wielowymiarowe modele zmienności Copula-GARCH. Uważam, że rozdział klarownie prezentuje wszystkie kwestie teoretyczne najistotniejsze z punktu widzenia celu rozprawy. Jest to de facto streszczenie obecnego stanu wiedzy teoretycznej nt. wykorzystania kopuli w analizie rynków finansowych. Śledzenie wywodu ułatwiają prezentacje graficzne dwuwymiarowych funkcji gęstości dla wybranych kopuli i wartości ich parametrów w Tabeli 1.2. Co prawda pewne rozwijające się współcześnie kierunki zostały tylko pokrótce napomniane, jak np. struktury dekompozycji klasy C-vine kopula rozkładów wielowymiarowych, ale nie należą one do głównego nurtu pracy.

Drugi rozdział pracy prezentuje metody wnioskowania bayesowskiego. Autorka rozpoczyna od zdefiniowania potrzebnego aparatu głównych pojęć w tym obszarze, a następnie przechodzi do kwestii estymacji i prognozowania na podstawie różnych specyfikacji rodziny Copula-GARCH. Koncentruje uwagę na mechanizmie działania metody Monte Carlo z funkcją ważności, która w dalszej części pracy posłuży jej do otrzymania charakterystyk rozkładu *a posteriori* wektora parametrów oraz rozkładu predyktywnego analizowanych zmiennych. Pewien niedosyt szczegółowości opisu odczułam w odniesieniu do omówienia znaczenia doboru rozkładów *a priori* dla szerokiej palety parametrów analizowanych specyfikacji. Przy wyborze tych rozkładów Autorka posłużyła się wskazówkami płynącymi z literatury przedmiotu, jednak warto byłoby pogłębić ten ciekawy temat, uwzględniając również np. znaczenie liczebności próby.

Rozdział trzeci prezentuje pierwszą część badania empirycznego. Autorka przedstawia w nim wyniki oszacowań bayesowskich modeli rodziny Copula-GARCH oraz porównuje je z wybranymi specyfikacjami wielowymiarowych modeli GARCH. Badania przeprowadzono na podstawie wybranych par dziennych stóp zwrotu z subindeksów WIG

oraz stóp zwrotu z kursów walutowych EUR/PLN i USD/PLN. Ponownie podkreślę pracochłonność prezentowanych analiz, wymagających niechybnie opracowania wielu zautomatyzowanych skryptów programistycznych. Wybór struktury zależności dla różnych par zmiennych dokonywany jest bowiem na podstawie porównania aż 13 bayesowskich modeli Copula-GARCH(1,1), w tym modeli z dynamiczną kopułą normalną i dynamiczną kopułą t-Studenta, a także bayesowskich modeli rodziny MGARCH. Wyniki procedur estymacji są przy tym starannie opisane, zarówno w odniesieniu do charakterystyk rozkładów *a posteriori* poszczególnych parametrów, jak i struktury zależności generowanej przez zmienny w czasie współczynnik τ Kendalla. Autorka konkluduje, że bayesowskie modele rodziny Copula-GARCH z asymetryczną lub symetryczną strukturą zależności znalazły się wśród modeli najlepiej dopasowanych do wybranych par subindeksów giełdowych. Rozdział ten odbieram jednak jako nieco zbyt schematyczny, Autorka w dość powtarzalny sposób opisuje wyniki estymacji modeli dla siedmiu wyróżnionych par instrumentów finansowych. Rozumiem, że taki wywód powstał zapewne w trosce o rzetelność i kompletność przekazywanej informacji. Niemniej jednak zabrakło mi próby interpretacji otrzymanych wyników z szerszej perspektywy ekonomicznej lub też np. ich oceny z punktu widzenia praktyki inwestowania na rynku finansowym. W przypadku kursów walutowych ciekawa byłaby również próba wytłumaczenia otrzymanych oszacowań biorąc pod uwagę specyfikę rynku walutowego, czy też wyjaśnienia fluktuacji ścieżki korelacji liniowej w zależności od sytuacji gospodarczej. W tym kontekście wyniki są przecież ciekawe, wartość oczekiwana rozkładu *a posteriori* współczynnika korelacji liniowej podlega bardzo znacznym wahaniom w zakresie od -0,2 do ok. 0,9.

Rozdział czwarty oceniam bardzo wysoko pod względem metodologicznym. Autorka ocenia w nim własności prognostyczne modeli w kontekście pomiaru ryzyka rynkowego portfeli inwestycyjnych. Do szacunku wartości zagrożonej (VaR) i oczekiwanego niedoboru (ES) na podstawie bayesowskich modeli klasy Copula-GARCH i MGARCH Autorka korzysta z symulacji Monte Carlo z funkcją ważności. Jakość prognostyczna modeli ryzyka jest również skonfrontowana z semiparametrycznymi modelami klasy CAViaR i CARE. Jako metody testowania wstecznej wartości zagrożonej Autorka wykorzystuje klasyczne test weryfikujący zgodność proporcji przekroczeń, tj. test Kupca oraz niezależność przekroczeń, tj. test Christoffersena, a także wybrane funkcje straty. Po raz kolejny na łamach tej recenzji chciałabym podkreślić, że przedstawiona analiza wykonana została z dużą starannością i troską o wiarygodność prezentowanych wniosków.

Świadczy o tym choćby systematycznie przeprowadzana reestymacja każdego z modeli w celu każdorazowego uwzględniania w próbie najnowszych 50 obserwacji stóp zwrotu, a tym samym poprawy jakości progностycznej modeli ryzyka. Innym przykładem staranności jest ocena jakości prognoz VaR i ES w odniesieniu do utrzymywania zarówno długiej, jak i krótkiej pozycji w portfelu. W kontekście tej pozytywnej opinii, jedynie z obowiązku związanego z rolą recenzenta pozwolę sobie sformułować kilka uwag i komentarzy. Pierwsza z nich dotyczy metod weryfikacji jakości progностycznej modeli VaR zastosowanych w rozprawie. W literaturze przedmiotu proponowanych jest znacznie więcej procedur testowych, przy czym w dużej mierze dotyczą one weryfikacji niezależności przekroczeń VaR. Oczywiście zgadzam się, że wykorzystany w rozprawie test Christoffersena jest niejako kanonem ekonometrii finansowej, jednak jest on również krytykowany za swoją konstrukcję, ściśle bazującą na łańcuchu Markowa pierwszego rzędu. W dalszych podejmowanych przez Autorkę badaniach warto byłoby uzupełnić go np. takimi testami statystycznymi, które weryfikują, czy przekroczenia VaR nie zależą przypadkiem od opóźnionych o więcej niż jeden okres przekroczeń VaR lub samych realizacji VaR (tak jak czyni się to m.in. w procedurze testowej Dynamic Quantile, i.e., DQ test i jej rozwinięciach). Ponadto, czy – w kontekście dużego nakładu pracy (zdolności programistycznych, nakładu pracy oraz wymaganej mocy obliczeniowej), a także otrzymanych w pracy wyników empirycznych – Autorka rekomenduje do zarządzania portfelem inwestycji wykorzystywanie bayesowskich modeli ryzyka (zamiast prostszych w estymacji „klasycznych” wielowymiarowych modeli rodziny GARCH)? Należy mieć na względzie fakt, że portfele instytucji finansowych zawierają wiele rodzajów aktywów. Czy zatem rozwinięcie bayesowskich modeli ryzyka do przypadku więcej niż dwuwymiarowego jest możliwe i sensowne z praktycznego punktu widzenia? Zastanawiam się również nad możliwością uwzględnienia efektu asymetrii w reakcji zmienności lub w „odpowiedzi” współczynnika τ Kendalla na napływ „dobrych” i „złych” informacji (aproksymowanych odpowiednio niższymi niż warunkowa wartość oczekiwana lub wyższymi niż warunkowa wartość oczekiwana wartościami opóźnionych stóp zwrotu)? W rozważanych bowiem w pracy doktorskiej modelach rozkłady brzegowe stóp zwrotu opisywane są za pomocą prostych modeli GARCH (a nie ich asymetrycznych wersji). Także równanie opisujące dynamikę parametru kopuli normalnej lub t-Studenta (por. wzór 1.9, s. 35) nie pozwala na niejednorodną reakcję chwilowej miary zależności między zmiennymi na jednoczesny duży wzrost lub jednoczesny duży spadek kursów rozważanych instrumentów finansowych. Być

może rozszerzenie takiej dynamiki miar współzależności wpłynie również na wyniki z prezentowanych w kolejnym rozdziale rozważań.

Piąty rozdział pracy poświęcony jest autorskiej propozycji rozwinięcia bayesowskiego modelu Copula-GARCH w celu analizy efektu zarażania. Pomysł Autorki polega na uwzględnieniu możliwości skokowej zmiany wyrazu wolnego dynamicznej specyfikacji zmiennego w czasie parametru ρ funkcji kopula. W badaniu empirycznym Autorka porównuje również prawdopodobieństwa *a posteriori* modeli bez wprowadzonej modyfikacji równania i z wprowadzoną modyfikacją, konkludując, że efekt zarażania przez rynek amerykański ma miejsce na rynku polskim, niemieckim i kanadyjskim. W kontekście proponowanej metody bardzo ciekawe wydaje mi się także jej rozwinięcie, by nie wymagała *a priori* ustalenia początku kryzysu. Ciekawa jestem, co Autorka myśli np. na temat porównania prawdopodobieństw *a posteriori* serii modeli o różnych momentach początku kryzysu? Czy takie podejście mogłoby służyć również do identyfikacji zmiany strukturalnej w odniesieniu do procesów generujących dane?

Konkludując, uważam, że zawartość merytoryczna dysertacji doktorskiej jest wysoka. Podjęta tematyka badawcza jest oryginalna, choć może wydawać się niszowa. W mojej opinii jednak to drugie jest wyłącznie zaletą. Autorka podejmuje się bowiem dużego wyzwania, czyli doskonalenia ważnych i trudnych metod statystycznych, z którymi mierzyło się dotychczas raczej niewielu reprezentantów krajowego środowiska naukowego. Szacunki i prognozy na podstawie modeli bayesowskich wymagały od Doktorantki nie tylko wiedzy teoretycznej, ale również dużego nakładu pracy związanego z przygotowaniem licznych skryptów programistycznych w języku programowania Matlab i opracowania wyników licznych symulacji Monte Carlo. Jakość badań Doktorantki potwierdza fakt, że jej pokrewne tematycznie prace opublikowane zostały w języku angielskim m.in. na łamach indeksowanego w bazie Scopus czasopisma „Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics” oraz w ramach serii wydawniczej „Springer Proceedings in Business and Economics”.

Odnosząc się krótko do kwestii redakcyjnych chciałabym zauważyć, że praca doktorska ma klarowną strukturę, napisana jest poprawnym, ładnym językiem. Wzory, tabele i wykresy zostały dobrze oznaczone i opisane. Odbiór przez czytelnika całości wyводу ułatwiają wieńczące każdy z rozdziałów podsumowania, w których Autorka syntetyczne przedstawia najważniejsze poruszone kwestie.

Konkluzja

Rozprawa doktorska mgr Justyny Mokrzyckiej, pod tytułem „Bayesowskie modele Copula-GARCH w analizie zależności finansowych szeregów czasowych” stanowi dzieło oryginalne, o walorach zarówno naukowych, jak i użytkowych. Autorka podjęła trudną tematykę badawczą, której w mojej opinii sprostała, wykazując się odpowiednią wiedzą i umiejętnościami. Uważam wobec tego, że spełnia warunki art. 13 Ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 z późn. zm.), a zatem spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Przedstawiam zatem Wysokiej Radzie Dyscypliny Ekonomii i Finansów Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie wniosek o przyjęcie rozprawy do publicznej obrony.



Katarzyna Bień-Barkowska